Séries de Fourier

I. Espaces de fonctions 2π périodiques

1°) L'espace des fonctions continues par morceau

Déf : On note $\mathcal{CM}_{2\pi}$ l'algèbre formée des fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-périodiques et continues par morceaux.

Prop : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-périodique et $a\in\mathbb{R}$. On a équivalence entre :

(i) f est continue par morceaux,

(ii) $f_{|[a,a+2\pi]}$ est continue par morceaux.

Théorème :

Soit $a\in\mathbb{R}$ et $g:[a,a+2\pi]\to\mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux vérifiant $g(a)=g(a+2\pi)$.

Il existe une unique fonction f 2π-périodique vérifiant $f_{|[a,a+2\pi]}=g$.

De plus, f est continue par morceaux voire continue si g l'est.

2°) L'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux

Déf : On note $\mathcal{CM}^k_{2\pi}$ l'algèbre des fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux.

Prop : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-périodique et $a\in\mathbb{R}$. On a équivalence entre :

(i) f est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux,

(ii) $f_{|[a,a+2\pi]}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux.

Pour $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, f est dérivable sauf en un nombre fini de point par période.
On note $D(f)$ la fonction qui à t associe $f'(t)$ si f est dérivable en t et associe 0 sinon.

Déf : La fonction $D(f)$ est appelée pseudo-dérivée de f, c'est une fonction continue par morceaux.

Prop : Si $f,g\in\mathcal{CM}^1_{2\pi}$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ alors $D(\lambda f+\mu g)=\lambda D(f)+\mu D(g)$ et $D(fg)=D(f)g+fD(g)$ sauf en un nombre fini de points par période.

3°) Intégrale sur une période

Prop : Pour $f\in\mathcal{CM}_{2\pi}$, on a pour tout $a,b\in\mathbb{R}$, $\int_a^{a+2\pi} f(t)\mathrm{d}t=\int_b^{b+2\pi} f(t)\mathrm{d}t$.

Déf : Cette valeur commune est appelée intégrale sur une période de $f\in\mathcal{CM}_{2\pi}$. On la note $\int_{2\pi} f(t)\mathrm{d}t$.

Théorème : (Formule d'intégration par parties généralisée)

Pour f,g 2π-périodiques, continues et $\mathcal{C}^1$ par morceaux : $\int_{2\pi} D(f)(t)g(t)\mathrm{d}t=-\int_{2\pi} f(t)D(g(t))\mathrm{d}t$.

4°) L'espace préhilbertien $\mathcal{C}_{2\pi}$

Déf : On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'algèbre des fonctions 2π-périodiques continues.

Théorème :

On définit un produit scalaire hermitien sur $\mathcal{C}_{2\pi}$ en posant $(f\,|\,g)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\overline{f(t)}g(t)\mathrm{d}t$.

Cor : $\mathcal{C}_{2\pi}$ est un espace préhilbertien complexe normé par $\|f\|_2^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t$.

5°) Polynôme trigonométrique

Déf : Pour $n\in\mathbb{Z}$, on note e_n la fonction de $\mathcal{C}_{2\pi}$ définie par $e_n(t)=\mathrm{e}^{int}$.

Théorème :

$(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée de $\mathcal{C}_{2\pi}$

Déf : On appelle polynôme trigonométrique de degré inférieur à n toute combinaison linéaire des $(e_k)_{-n\leq k\leq n}$ c'est-à-dire toute fonction de la forme $t\mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{ikt}$ avec $c_k\in\mathbb{C}$.

On note $\mathcal{P}_n = \mathrm{Vect}(e_k)_{-n\leq k\leq n}$ l'espace des polynômes trigonométriques de degré inférieur à n.

Déf : On appelle polynôme trigonométrique toute combinaison linéaire (finie) des fonctions $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ c'est-à-dire toute fonction de la forme $t\mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{int}$ avec $(c_n)\in\mathbb{C}^{(\mathbb{Z})}$.

On note $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ l'espace des polynômes trigonométriques.

Théorème de Weierstrass, version trigonométrique (admis)

$\forall f\in\mathcal{C}_{2\pi}$, $\forall \varepsilon>0$, $\exists g\in\mathcal{P}$, $\|f-g\|_\infty$.

Ainsi toute fonction continue 2π-périodique est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.

Cor : $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathcal{C}_{2\pi}$ pour $\|.\|_\infty$ et pour $\|.\|_2$.

II. Coefficients de Fourier

Dans cette section $f\in\mathcal{CM}_{2\pi}$.

1°) Coefficients exponentiels

Déf : Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, on pose $c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-int}\mathrm{d}t$ appelé coefficient de Fourier exponentiel de f d'indice n.

Prop : $c_n(\lambda f+\mu g)=\lambda c_n(f)+\mu c_n(g)$ et $c_n(\overline{f})=\overline{c_{-n}(f)}$.

Théorème :

Si f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux alors $c_n(D(f))=inc_n(f)$.

Cor : Si f est $\mathcal{C}^{p-1}$ et de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux alors $c_n(f^{(p)})=(in)^p c_n(f)$

2°) Coefficients trigonométriques

Déf : Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{2\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t$ et $b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{2\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$ appelés coefficients de Fourier trigonométriques de f d'indice n.

Prop : $\forall n\in\mathbb{N}$, $c_n(f)=\frac{a_n(f)-ib_n(f)}{2}$, $c_{-n}(f)=\frac{a_n(f)+ib_n(f)}{2}$,

$a_n(f)=c_n(f)+c_{-n}(f)$ et $b_n(f)=i(c_n(f)-c_{-n}(f))$.

Théorème :

Si f est une fonction réelle alors $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont réels.

Si f est paire alors $a_n(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t$ et $b_n(f)=0$.

Si f est impaire alors $a_n(f)=0$ et $b_n(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$.

3°) Comportement asymptotique des coefficients de Fourier

Prop : La suite des coefficients de Fourier de f est bornée.

Plus précisément $|c_n(f)|\leq\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|f(t)|\mathrm{d}t$.

Théorème :

Les coefficients de Fourier de f tendent vers 0.

Plus précisément : $c_n(f)\xrightarrow[|n|\to+\infty]{}0$.

Cor : Si f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux alors $c_n(f)=o(1/n)$ quand $|n|\to+\infty$.

Plus généralement, si f est $\mathcal{C}^{p-1}$ et de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux alors $c_n(f)=o(1/n^p)$ quand $|n|\to+\infty$.

4°) Série de Fourier

Déf : On appelle série de Fourier de f la suite des fonctions $S_n(f)$ avec $S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$.

$S_n(f)$ est appelée somme partielle de rang n de f.

Déf : On dit que la série de Fourier de f converge en $t \in \mathbb{R}$ ssi la suite $(S_n(f)(t))$ converge. Sa limite est alors appelée somme de Fourier de f en t et on note $S(f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$.

Prop : $S_n(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$.

Sous réserve de convergence $S(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$

Déf : Une fonction $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ est dite développable en série de Fourier ssi sa série de Fourier converge sur $\mathbb{R}$ et que $S(f) = f$.

III. Convergence en moyenne quadratique

1°) L'espace préhilbertien $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$

Déf : Une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dite de carré sommable ssi les séries $\sum |u_n|^2$ et $\sum |u_{-n}|^2$ convergent.
On note $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ l'ensemble de ces suites.

Théorème :

$\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ est un espace préhilbertien complexe pour le produit scalaire donné par : $(u \mid v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{u}_n v_n$.

Cor : $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ est un espace préhilbertien complexe normé par $\|u\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u_n|^2$.

2°) Inégalité de Bessel

Prop : Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = (e_n \mid f)$.

Par conséquent, l'application $f \mapsto c_n(f)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_{2\pi}$.

Théorème :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et 2π-périodique.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(f)$ est la projection orthogonale de f sur $\mathcal{P}_n$.
Par suite $d(f,\mathcal{P}_n) = \|f - S_n(f)\|$ et donc $\|f\|_2^2 = \|S_n(f)\|^2 + d(f,\mathcal{P}_n)^2$

Cor : Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique : $\sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 \leq \|f\|_2^2$.

Prop : $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ et $(a_n(f)),(b_n(f)) \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$.

3°) Formule de Parseval

Théorème : (convergence en moyenne quadratique)

La série de Fourier d'une fonction f continue 2π-périodique converge vers f pour la norme $\|.\|_2$.

Théorème : (Egalité de Parseval)

Pour f continue et 2π-périodique :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |f(t)|^2 \, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right).$$

4°) L'isométrie $f \mapsto \hat{f}$

Déf : Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et 2π -périodique on note $\hat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ l'application définie par $\hat{f}(n) = c_n(f)$.

Théorème :

L'application $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ est une application linéaire continue de $\mathcal{C}_{2\pi}$ vers $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ qui conserve le produit scalaire.

Cor : $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{2\pi} \overline{f(t)} g(t) \mathrm{d}t = \sum_{N \in \mathbb{Z}} \overline{c_n(f)} c_n(g)$ et

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \overline{f(t)} g(t) \mathrm{d}t = \frac{\overline{a_0(f)} a_0(g)}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \overline{a_n(f)} a_n(g) + \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{b_n(f)} b_n(g).$$

Théorème :

L'application $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ est une application injective de $\mathcal{C}_{2\pi}$ vers $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

Ainsi, pour $f, g \in \mathcal{C}_{2\pi}$: $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = c_n(g) \Rightarrow f = g$.

IV. Convergence ponctuelle

1°) Convergence normale

Théorème : (de convergence normale)

Si f est 2π -périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

2°) Théorème de Dirichlet

Déf : Pour $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, on pose $f(t^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} f(t+h)$ et $f(t^-) = \lim\limits_{h \to 0^+} f(t+h)$ (valeurs à droite et à gauche de f en t).

Déf : Une fonction f continue par morceaux est dite régularisée ssi pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$.

Théorème : (admis)

Si f est 2π -périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f converge en t vers le $\dfrac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$.

Cor : Si f est 2π -périodique $\mathcal{C}^1$ par morceaux et régularisée alors f est développable en série de Fourier.

3°) Cas des fonctions T périodiques

Les notions qui précèdent s'étendent aux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T -périodiques avec $T > 0$.

Prop : $f : x \mapsto f(x)$ est T -périodique ssi $t \mapsto f(tT/2\pi)$ est 2π -périodique.

Par le changement de variable $t = 2\pi x/T$, on pose pour une fonction T périodique $f : x \mapsto f(x)$:

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_T f(x) \mathrm{e}^{-2i\pi nx/T} \mathrm{d}x,\ a_n(f) = \frac{2}{T}\int_T f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \mathrm{d}x \text{ et } b_n(f) = \frac{2}{T}\int_T f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \mathrm{d}x$$

$$S_p(f)(x) = \sum_{n=-p}^{p} c_n(f) \mathrm{e}^{i\frac{2\pi nx}{T}} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{p} a_n(f) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + b_n(f) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)$$

$$S(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) \mathrm{e}^{i\frac{2\pi nx}{T}} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + b_n(f) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right).$$